|  |  |
| --- | --- |
| **D:\Users\Nicu\Documents\MONICA\Detasare CNLR\blazon-png-transparent.png** | **CONCURSUL „MATEMATICA, DE DRAG”****EDIŢIA a XII-a, 17-19.11.2017** |

**Clasa a IX-a**

**Problema 1**. Fie *ABC* un triunghi cu centrul în *G*. Dacă *D, E, F* sunt proiecţiile lui *G* pe dreptele *BC*, *CA*, respectiv *AB*, arătaţi că triunghiurile *ABC* şi *DEF* au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

*Gazeta matematică*

**Problema 2**. Aflaţi tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) ce verifică sistemul de ecuaţii:

$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}=2\left(y+z\right) \\ x^{6}=y^{6}+z^{6}+31(y^{2}+z^{2})\end{array}\right.$$

**Problema 3.** Fie $P=\left\{P\_{1}, P\_{2}, . . . , P\_{2017}\right\}$ o mulţime de 2017 puncte în interiorul unui cerc de rază 1 şi centru $P\_{1}$. Pentru fiecare $k=1, 2, …, 2017$ notăm cu $x\_{k}$ distanţa de la $P\_{k}$ la cel mai apropiat punct din P dar diferit de acesta. Arătaţi că:

$\left(x\_{1}\right)^{2}+\left(x\_{2}\right)^{2}+ …+\left(x\_{2017}\right)^{2}\leq 9$.

**Problema suplimentară.** Alcătuiţi un cvintet cu tema: ***sistem*** utilizând cuvinte

 din limbajul specific - limbajul matematic.

Notă explicativă: ***Cvintetul***  este o poezie cu 5 versuri în care sunt sintetizate informaţii, caracteristici sau detalii cu privire la un subiect ( cuvânt tematic) dat.

Crearea acestei poezii se face conform următoarelor reguli:

*Versul 1* : conţine un cuvânt (*substantiv* - cuvânt cheie care denumeşte subiectul care urmează a fi descris)

*Versul 2* : este format din două cuvinte (*adjective* care arată însuşiri ale cuvântului tematic)

*Versul 3* : este alcătuit din trei cuvinte ( *verbe la gerunziu* care exprima acţiuni ale subiectului, sau acţiuni ce au legatură cu subiectul)

*Versul 4* : este format din patru cuvinte care alcătuiesc o propoziţie (această *propoziţie* afirmă ceva esenţial despre cuvantul tematic)

*Versul 5* : este un singur cuvânt (un *substantiv* *sau* un *verb* care sintetizeaza caracterizarea temei/ subiectului sau a unei idei/stări/senzaţii generate sau legate de subiect)

|  |  |
| --- | --- |
| **D:\Users\Nicu\Documents\MONICA\Detasare CNLR\blazon-png-transparent.png** | **CONCURSUL „MATEMATICA, DE DRAG”****EDIŢIA a XII-a, 17-19.11.2017** |

**Clasa a X-a**

**Problema 1**. Dacă numerele complexe distincte a, b, c verifică relaţia $\left(a-b\right)^{4}+\left(b-c\right)^{4}+\left(c-a\right)^{4}=0$, arătaţi că $\left|a-b\right|=\left|b-c\right|=\left|c-a\right|$.

*Gazeta matematică*

**Problema 2**. Fie funcţia $f:N⟶N$, cu următoarele proprietăţi:

 (i)$f\left(0\right)=0$ (ii)$f\left(2n\right)=2f(n)$ şi iii) $f\left(2n+1\right)=n+2f(n)$ pentru orice $n\geq 0$.

 a) Determinaţi următoarele trei mulţimi: $L=\left\{n \left| f(n)<f(n+1)\right.\right\}$,

 $E=\left\{n \left| f\left(n\right)=f(n+1)\right.\right\}$ şi $G=\left\{n \left| f(n)>f(n+1)\right.\right\}$.

 b) Pentru $k\geq 0$, găsiţi expresia lui $a\_{k}=max\left\{f\left(n\right)\left|0\leq n\leq 2^{k}\right.\right\}$ în funcţie

 de k.

**Problema 3.** a) Arătaţi că există $n\_{0}$ număr natural astfel încât pentru $n\geq n\_{0}$ să avem $\left(\frac{4}{5}\right)^{n}<\frac{1}{300}$

 b) Pentru $n\in N^{\*}$ definim $F\_{n}$ ca fiind familia funcţiilor definite pe mulţimea $A\_{n}=\left\{1, 2, … , n\right\}$ cu valori în mulţimea $B=\left\{1, 2, 3, … , 9, 10\right\}$ care iau cel puţin o valoare număr par, cel puţin o valoare multiplu de 3 şi cel puţin o valoare multiplu de 5. Arătaţi că există $n\_{0}$ număr natural astfel încât pentru $n\geq n\_{0}$ cel puţin 99% dintre funcţiile definite pe $A\_{n}$ cu valori în B sunt în $F\_{n}$

**Problema suplimentară.** Alcătuiţi un cvintet cu tema: ***mulţime*** utilizând cuvinte

 din limbajul specific - limbajul matematic.

Notă explicativă: ***Cvintetul***  este o poezie cu 5 versuri în care sunt sintetizate informaţii, caracteristici sau detalii cu privire la un subiect ( cuvânt tematic) dat.

Crearea acestei poezii se face conform următoarelor reguli:

*Versul 1* : conţine un cuvânt (*substantiv* - cuvânt cheie care denumeşte subiectul care urmează a fi descris)

*Versul 2* : este format din două cuvinte (*adjective* care arată însuşiri ale cuvântului tematic)

*Versul 3* : este alcătuit din trei cuvinte ( *verbe la gerunziu* care exprima acţiuni ale subiectului, sau acţiuni ce au legatură cu subiectul)

*Versul 4* : este format din patru cuvinte care alcătuiesc o propoziţie (această *propoziţie* afirmă ceva esenţial despre cuvantul tematic)

*Versul 5* : este un singur cuvânt (un *substantiv* *sau* un *verb* care sintetizeaza caracterizarea temei/ subiectului sau a unei idei/stări/senzaţii generate sau legate de subiect)

|  |  |
| --- | --- |
| **D:\Users\Nicu\Documents\MONICA\Detasare CNLR\blazon-png-transparent.png** | **CONCURSUL „MATEMATICA, DE DRAG”****EDIŢIA a XII-a, 17-19.11.2017** |

**Clasa a XI-a**

**Problema 1**. a) Determinaţi toate permutările din $S\_{4}$ care comută cu permutarea

 $σ=\left( \begin{matrix}1&2\\2&1\end{matrix} \begin{matrix}3&4\\4&3\end{matrix} \right)$

 b) Determinaţi toate permutările din $S\_{2n}$ care comută cu permutarea

 $σ=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&…\end{matrix} \begin{matrix}n&n+1&…\end{matrix} 2n\\\begin{matrix} 2&3&…\end{matrix} \begin{matrix}1&n+2&…\end{matrix} n+1\end{array}\right)$.

*Gazeta matematică*

**Problema 2**. Fie şirul $\left(a\_{n}\right)\_{n\geq 0}$ definit prin $a\_{0}=1$ şi $a\_{n+1}=\frac{a\_{n}}{n^{2}a\_{n}+a\_{n}^{2}+1}$, $n\geq 0$.

 a) Arătaţi că şirul $b\_{n}=\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+ … +\frac{1}{n^{2}}$, $n\geq 1$ este convergent.

 b) Aflaţi $\lim\_{x\to \infty }n^{3}a\_{n}$

**Problema 3.** Spunem că o matrice A are proprietatea $P$ dacă şi numai dacă produsul tuturor elementelor sale este nenul. Să se arate că:

a) Dacă $A\in M\_{2}\left(R\_{+}\right)$ astfel încât $A^{2017}$ are proprietatea $P$ atunci $A+I\_{2}$ are proprietatea $P$.

b) Dacă $A\in M\_{3}\left(R\_{+}\right)$ astfel încât $A^{2017}$ are proprietatea $P$ atunci $A^{2}+A+I\_{2}$ are proprietatea $P$.

c) Dacă $A\in M\_{2}\left(R\right)$ mai este adevărată afirmaţia de la a)?

**Problema suplimentară.** Alcătuiţi un cvintet cu tema: ***şir***  utilizând cuvinte

 din limbajul specific - limbajul matematic.

Notă explicativă: ***Cvintetul***  este o poezie cu 5 versuri în care sunt sintetizate informaţii, caracteristici sau detalii cu privire la un subiect ( cuvânt tematic) dat.

Crearea acestei poezii se face conform următoarelor reguli:

*Versul 1* : conţine un cuvânt (*substantiv* - cuvânt cheie care denumeşte subiectul care urmează a fi descris)

*Versul 2* : este format din două cuvinte (*adjective* care arată însuşiri ale cuvântului tematic)

*Versul 3* : este alcătuit din trei cuvinte ( *verbe la gerunziu* care exprima acţiuni ale subiectului, sau acţiuni ce au legatură cu subiectul)

*Versul 4* : este format din patru cuvinte care alcătuiesc o propoziţie (această *propoziţie* afirmă ceva esenţial despre cuvantul tematic)

*Versul 5* : este un singur cuvânt (un *substantiv* *sau* un *verb* care sintetizeaza caracterizarea temei/ subiectului sau a unei idei/stări/senzaţii generate sau legate de subiect)

|  |  |
| --- | --- |
| **D:\Users\Nicu\Documents\MONICA\Detasare CNLR\blazon-png-transparent.png** | **CONCURSUL „MATEMATICA, DE DRAG”****EDIŢIA a XII-a, 17-19.11.2017** |

**Clasa a XII-a**

**Problema 1**. Fie $\left(M, ∙ \right)$ un monoid finit cu elementul neutru *e*. Să se arate că dacă $a^{2}\ne a$ pentru orice $a\in M∖\left\{e\right\}$, atunci $\left(M, ∙ \right)$ este grup.

*Gazeta matematică*

**Problema 2**. Fie $f:\left[0, 1\right]⟶R$ o funcţie care admite primitive şi *F* o primitivă a sa cu $F\left(1\right)=0$. Demonstraţi că există $c\in \left(0, 1\right)$ astfel încât $2017\left|F(c)\right|<\left|f(c)\right|$.

**Problema 3**. Fie $f:\left[0, \left.\infty \right)⟶\right.\left[1, \left.\infty \right)\right.$ o funcţie strict crescătoare, continuă şi surjectivă şi $F$ o primitivă a sa cu $F\left(0\right)=0$.

a) Arătaţi că există un şir $\left(x\_{n}\right)\_{n\geq 1}$ unic definit prin $F\left(x\_{n}\right)=n$ pentru orice $n\geq 1$;

b) Calculaţi $\lim\_{x\to \infty }\frac{x\_{n}}{n}$

**Problema suplimentară.** Alcătuiţi un cvintet cu tema: ***funcţie*** utilizând cuvinte din limbajul specific - limbajul matematic.

Notă explicativă: ***Cvintetul***  este o poezie cu 5 versuri în care sunt sintetizate informaţii, caracteristici sau detalii cu privire la un subiect ( cuvânt tematic) dat.

Crearea acestei poezii se face conform următoarelor reguli:

*Versul 1* : conţine un cuvânt (*substantiv* - cuvânt cheie care denumeşte subiectul care urmează a fi descris)

*Versul 2* : este format din două cuvinte (*adjective* care arată însuşiri ale cuvântului tematic)

*Versul 3* : este alcătuit din trei cuvinte ( *verbe la gerunziu* care exprima acţiuni ale subiectului, sau acţiuni ce au legatură cu subiectul)

*Versul 4* : este format din patru cuvinte care alcătuiesc o propoziţie (această *propoziţie* afirmă ceva esenţial despre cuvantul tematic)

*Versul 5* : este un singur cuvânt (un *substantiv* *sau* un *verb* care sintetizeaza caracterizarea temei/ subiectului sau a unei idei/stări/senzaţii generate sau legate de subiect)